

Διάλκην
28/11/2019

Bayes

1

Παράδειγμα 1: Έστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ από $P(\theta)$, όπου

θ η τιμή της $\ominus$ πρ. εκ των προτερικών υποθέσει την Γάμμα $(P, \frac{1}{q})$

i) Να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ και της $e^{-\theta}$, πρ. γνωστής απάντησης το T.S.

ii) Να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ πρ. γνωστής απάντησης την γνωστής Linear, δηλαδή

$$L(\theta, d) = e^{k(d-\theta)} - k(d-\theta) - 1.$$

Λόγος

i) Για $g(\theta) = e^{-\theta}$, έχουμε μέση υποδοχίδα σε $\theta > 0$

$$f(\theta/x) = \frac{\theta^{P+2x_i-1} e^{-\theta(q+n)}}{\left(\frac{1}{q+n}\right)^{P+2x_i} \Gamma(P+2x_i)}$$

δηλαδή $\theta/x \sim \text{Γάμμα}(P + \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{P+n})$

Θα έχουμε ότι: $d_g^* = E_{\theta/x}(e^{-\theta}) = \int_0^{+\infty} e^{-\theta} f(\theta/x) d\theta$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{P+2x_i-1} e^{-\theta(q+n-1)}}{\left(\frac{1}{q+n}\right)^{P+2x_i} \Gamma(P+2x_i)} d\theta. \Rightarrow$$

$$d_g^* = \frac{(q+n)^{P+2x_i} \Gamma(P+2x_i)}{(n+q+1)^{P+2x_i} \Gamma(P+2x_i)}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\theta^{P+2x_i-1} e^{-\theta(n+q+1)}}{\left(\frac{1}{n+q+1}\right)^{P+2x_i} \Gamma(P+2x_i)} d\theta$$

$$= \frac{(a+n)^{p+2xi}}{(a+n+1)^{p+2xi}} = \left(\frac{a+n}{a+n+1} \right)^{p+2xi}$$

Βήματα: Γνωρίζουμε ότι την Γαλβία υποτεταχέν
 ότι η αντίστοιχη ποσοδωμήτρια Γωσπόμεν έχ
 βορδών $m_{a|x}(t) = (1 - Bt)^{-a}$ υπό.

$$E_{a|x}[e^{-\theta}] = E(e^{-\theta \cdot 1}) = m_{a|x}(t=-1). \text{ Επομένως}$$

$$\text{θα είναι: } m_{a|x}(t) = \left(1 - \frac{1}{a+n} t \right)^{-(p+2xi)}, \text{ υπό}$$

την προϋπόθεση $t < a+n$. Άρα

$$m_{a|x}(-1) = \left(1 + \frac{1}{a+n} \right)^{-(p+2xi)} = \left(\frac{a+n}{n+a+1} \right)^{p+2xi}, \text{ } t=-1 < a+n$$

Παρατήρηση: Για την εύρεση των ποσών $f(x)$,
 $f(x^2)$, $f(x^3)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την
 ποσοδωμήτρια Γωσπόμεν $m_x(t) = E(e^{tx})$. Ετσι θα

$$\text{είναι: } m'_x(t) = E(xe^{tx}) \Rightarrow m'_x(0) = E(x) = m_x(t=0)$$

$$m''_x(t) = E(x^2 e^{tx}) \Rightarrow m''_x(0) = E(x^2)$$

$$m'''_x(t) = E(x^3 e^{tx}) \Rightarrow m'''_x(0) = E(x^3)$$

$$\vdots$$

$$m^{(k)}_x(t) = E(x^k e^{tx}) \Rightarrow m^{(k)}_x(0) = E(x^k)$$

Για παράδειγμα αν θέλουμε να υπολογίσουμε την
 ποσότητα $f(x^4)$ αρκεί να χρησιμοποιήσω
 ότι $f(x^4) = m^{(4)}_x(t=0)$.

ii) Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση κινδύνου Bayes ως προς d . Βρίσκουμε τον θεωρητικό που έχουμε αναφέρει πριν να ενδιώσουμε την ελαχιστοποίηση της προόδου $E_{0|x}(L(\theta, d))$ ως προς d .

Θα έχουμε ότι:

$$E_{0|x}(L(\theta, d)) = \int_0^{+\infty} (e^{k(d-\theta)} - k(d-\theta) - 1) \cdot f(\theta|x) d\theta.$$

Προβλεψη: Εάν θέλουμε

να υπολογίσουμε τον ευσταθή Bayes της $g(\theta)$, τότε στην διπλάνη προκύπτει ότι έχουμε $g(\theta)$, επί θ .

$\Rightarrow$ Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω προέκταση και εξισώσουμε με το μηδέν θα έχουμε:

$$\int_0^{+\infty} (k e^{k(d-\theta)} - k) f(\theta|x) d\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} e^{k(d-\theta)} f(\theta|x) d\theta = \int_0^{+\infty} f(\theta|x) d\theta = 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} e^{k(d-\theta)} f(\theta|x) d\theta = 1 \Rightarrow$$

$$e^{kd} = \frac{1}{E_{0|x}(e^{-k\theta})} \Rightarrow kd = \ln \left(\frac{1}{E_{0|x}(e^{-k\theta})} \right) \Rightarrow$$

$$d = k^{-1} \ln \left(\frac{1}{E_{0|x}(e^{-k\theta})} \right)$$

Όλας από την παραγωγία θα έχουμε
της εκ των υστέρων θ/x

$$E_{\theta|x}(e^{-k\theta}) = m_{\theta|x}(-k) = \left(1 + \frac{1}{q+n} \cdot k\right)^{-(p+2x)}$$

βε $\pm < q+n$, δηλαδή $-k < q+n$.

Επομένως
$$d^* = k^{-1} \ln \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{q+n} k\right)^{-(p+2x)}} \right)$$

Παράδειγμα 9: Έστω τ.δ. $x_1, \dots, x_n$ από $U(0, \theta)$

δηλαδή $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < x < \theta$. να $f(\theta) = 1$, $0 < \theta < 1$.

Να βρεθεί ο ευχρηστικός Bayes της θ ,

όπου
$$L(\theta, d) = \frac{-(d-\theta)^2}{\theta^2}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της $f(x|\theta)$ εξαρτάται από το θ , επομένως θα έχουμε ότι:

$$f(\theta|x) = \frac{1 - \frac{1}{\theta^n}}{\int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta^n} d\theta}, \text{ αφού}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 < x_1 < \theta \\ 0 < x_2 < \theta \\ \vdots \\ 0 < x_n < \theta \end{aligned} \right\} x(n) < \theta < 1$$

Ετσι $f(\theta|x) = \frac{\theta^{-n}}{c}$, $x(n) < \theta < 1$ όπου $c = \int_{x(n)}^1 \theta^{-n} d\theta$

Επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε ως προς d την
νοσότητα
$$E_{\theta|x}(L(\theta, d)) = \int \frac{(d-\theta)^2}{\theta^2} f(\theta|x) d\theta.$$

Επομένως παραγωγίζουμε ως προς d την εν λόγω
νοσότητα και την θέτουμε ίση με το μηδέν.

$$\int \frac{\theta(d-\theta)}{\theta^2} f(\theta|x) d\theta = 0 \Rightarrow d \int \frac{1}{\theta^2} f(\theta|x) d\theta = \int \frac{1}{\theta} f(\theta|x) d\theta$$

$$\Rightarrow d^* = \frac{\int \frac{1}{\theta} f(\theta|x) d\theta}{\int \frac{1}{\theta^2} f(\theta|x) d\theta}$$

Υπολογίζοντας τα ολοκλήρωμα σε αριθμητική και παρανομαστή θα έχουμε:

$$d^* = \frac{\frac{1}{c} \int_{x(n)}^1 \theta^{-1} \theta^{-n} d\theta}{\frac{1}{c} \int_{x(n)}^1 \theta^{-2} \theta^{-n} d\theta} = \frac{\int_{x(n)}^1 \theta^{-(n+1)} d\theta}{\int_{x(n)}^1 \theta^{-(n+2)} d\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{-n} [\theta^{-n}]_{\theta=x(n)}^{\theta=1}}{\frac{1}{-(n+1)} [\theta^{-(n+1)}]_{\theta=x(n)}^{\theta=1}} \Rightarrow d^* = \frac{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1 - x(n)^{-n}}{1 - x(n)^{-(n+1)}}}{1}$$

$$\Rightarrow d^* = \frac{n+1}{n} x(n) \cdot \frac{1 - x(n)^{-n}}{1 - x(n)^{-(n+1)}}$$

Παράδειγμα 3: (Εστω π.δ. $x_1, \dots, x_n$ στο $N(\theta, 1)$)
 Θ $\sim N(\theta, 1)$. Να βρεθεί ο ευτικτός Bayes στα:
 $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$.

Λόγος

6

Λίστα

Έχετε ήδη αποδείξει ότι η
 σε των οποίων $\theta | x$ είναι μια
 τ.β. που ακολουθεί κανονική
 κατανομή με $\theta | x \sim N(\frac{n\bar{x}}{n+1}, \frac{1}{n+1})$

Δεδομένου ότι ως γνωστόν ανάλυση
 έχετε το Τ.Σ. Βάση του προβλήματος ①, γνωστά
 και θεωρήματα. Θα έχουμε ο εκτιμητής
 Bayes της θ θα δίνεται από την έκφραση

$$d^* = E_{\theta | x}(\theta) = \frac{n\bar{x}}{n+1}$$

Παράδειγμα 4: Έστω το $x_1, \dots, x_n$ από $B(1, \theta)$, $0 < \theta < 1$

και $f(\theta) \sim B(a, b)$, δηλαδή

$$f(\theta) = \frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}}{B(a, b)} = \frac{\Gamma(a+b) \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}}{\Gamma(a) \Gamma(b)}, \quad 0 < \theta < 1$$

Έχοντας ως γνωστόν λινδία το Τ.Σ. να
 βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ και της
 $\theta(1-\theta)$.

Λίστα

Γνωρίζουμε ότι $f(x|\theta) = \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}$, $x_i = 0, 1, \dots$

$$f(\theta|x) \text{ και } f(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}, \quad 0 < \theta < 1$$

Θα θέλαμε να υπολογίσουμε την σε των οποίων
 κατανομή της $\theta | x$.

$$\theta \text{ και } f(\theta|x) \propto f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)}{\int_0^1 f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) d\theta}$$

$$\Rightarrow f(\theta|x) = \frac{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \cdot \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}}{\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i} d\theta}$$

$$f(\theta|x) = \frac{\theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i}}{C} =$$

$$= \frac{\theta^{\alpha+\sum x_i-1} (1-\theta)^{\beta+n-\sum x_i-1}}{C}$$

$$\alpha^* - 1 = \alpha + \sum x_i - 1 \Rightarrow \alpha^* = \alpha + \sum x_i$$

$$\beta^* - 1 = \beta + n - \sum x_i - 1 \Rightarrow \beta^* = \beta + n - \sum x_i$$

Οπότε η εν των υστερών κατανομή της $\theta|x$ θα είναι η βίτα με $\theta|x \sim \text{Beta}(\alpha^* = \alpha + \sum x_i, \beta^* = \beta + n - \sum x_i)$
Ευχρηστική Βάση για την θ :

Παρατηρούμε ότι η ανωτέρω συνάρτηση είναι το π , βόνη πορίσματος (2) του θεωρήματος για τον ευχρηστική Βάση θα έχουμε ότι αυτός δίνεται από την σχέση:

$$d_1^* = E_{\theta|x}(\theta) = \frac{\alpha^*}{\alpha^* + \beta^*} = \frac{\alpha + \sum x_i}{\alpha + \sum x_i + \beta + n - \sum x_i} = \frac{\alpha + \sum x_i}{\alpha + \beta + n}$$

Ευχρηστική Βάση για την $\theta(1-\theta)$:

Αντίστοιχα με τον προηγούμενο ευχρηστική θα έχουμε:

$$d_2^* = E_{\theta|x}(\theta(1-\theta)) = \int_0^1 \theta(1-\theta) f(\theta|x) d\theta$$

$$\begin{aligned} E_{\theta|x}(\theta^2 - \theta) &= E_{\theta|x}(\theta^2) - E_{\theta|x}(\theta) \\ &= \text{var}_{\theta|x}(\theta) + (E_{\theta|x}(\theta))^2 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5: Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ στο $B(1, \theta)$, $0 < \theta < 1$ και $f(\theta) \sim U(0, 1)$. Να βρεθεί ο ευχρηστικός Bayes της $\theta(1-\theta)$, γνωστών απαντήσεων το Τ.Σ.

Λύση

Αρχικά θα θέλουμε να ευνοήσουμε την εκ των υστέρων κατανομή θ/χ. Γνωρίζουμε ότι

$$f(\theta/x) \propto f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta), \text{ όπου } f(\theta) = 1, 0 < \theta < 1$$

$$f(x_i|\theta) = \theta^{x_i} (1-\theta)^{1-x_i}, 0 < \theta < 1.$$

Επομένως ορίζουμε με το προηγούμενο παράδειγμα θα προκύψει ότι:

* θ/x βέτο ($\alpha^* = \sum x_i + 1, \beta^* = n - \sum x_i + 1$)

• Ευχρηστικός Bayes για την $\theta(1-\theta)$:

Ο ευχρηστικός Bayes της $g(\theta) = \theta(1-\theta)$ θα δίνεται από την σχέση:

$$d^* = E_{\theta/x}(\theta(1-\theta)) = \int_0^1 \theta(1-\theta) f(\theta/x) d\theta =$$

$$= \int_0^1 \theta(1-\theta) \frac{\Gamma(\alpha^* + \beta^*)}{\Gamma(\alpha^*) \Gamma(\beta^*)} \theta^{\alpha^*-1} (1-\theta)^{\beta^*-1} d\theta.$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha^* + \beta^*)}{\Gamma(\alpha^*) \Gamma(\beta^*)} \int_0^1 \theta^{\alpha^*} (1-\theta)^{\beta^*} d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha^* + \beta^*) \Gamma(\alpha^* + 1) \Gamma(\beta^* + 1)}{\Gamma(\alpha^*) \Gamma(\beta^*) \Gamma(\alpha^* + \beta^* + 1)} \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha^* + \beta^* + 2)}{\Gamma(\alpha^* + 1) \Gamma(\beta^* + 1)} \theta^{(\alpha^* + 1)-1} (1-\theta)^{(\beta^* + 1)-1} d\theta$$

Οπώς $\Gamma(\beta^* + 1) = \beta^* \Gamma(\beta^*)$
 $\Gamma(\alpha^* + 1) = \alpha^* \Gamma(\alpha^*)$

$$\Gamma(\alpha^* + \beta^* + 2) = (\alpha^* + \beta^* + 1)(\alpha^* + \beta^*) \Gamma(\alpha^* + \beta^*)$$

Επομένως $d^* = \frac{\alpha^* \cdot \beta^*}{(\alpha^* + \beta^* + 1)(\alpha^* + \beta^*)}$

Παράδειγμα 6: Έστω $X \sim \text{Exp}(\theta)$ και $f(\theta) = 1, \theta > 0$

Εάν ως γνωστές απώλειες χρησιμοποιήσουμε
το απώλειο εφάρμο, δηλαδή $L(\theta, d) = |d - \theta|$, να
βρούμε ο εκτιμητής Bayes της θ .

↑
δοκιμάσω ότι